# Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι - 2º Φυλλάδιο Ασκήσεων

(1) Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τα όρια των ακολουθιών:

α. $z_n = \operatorname{Arg}\left((-1)^n \cdot \frac{1+i}{\sqrt{n}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

β. $w_n = \operatorname{Arg}\left(\sqrt[n]{1+i}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

γ. $a_n = \operatorname{Arg}\left((1+i)^n\right)$, $n \in \mathbb{N}$

δ. $b_n = \left[\log(-1)\right]^n$, $n \in \mathbb{N}$

ε. $c_n = \frac{i}{n} \operatorname{Arg}\left(n^2 + i^n \cdot \sqrt[n]{n+1}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

(2) Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τα όρια των ακολουθιών:

α. $z_n = \frac{n^2 \cdot i^n}{n^3+1}$, $n \in \mathbb{N}$ β. $w_n = n \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

γ. $a_n = n \cdot i^n$, $n \in \mathbb{N}$ δ. $b_n = n^{\frac{i}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

ε. $c_n = (-1)^{ni}$, $n \in \mathbb{N}$ στ. $d_n = \frac{in^2 - in + 1 - 3i}{(n-i)(2n+4i-3)}$, $n \in \mathbb{N}$

ζ. $e_n = \frac{(1+i)n + i\sqrt{n} + 1}{(2-i)n + (1+i)\sqrt[3]{n} + 2i}$, $n \in \mathbb{N}$

(3) Να δειχθεί ότι:

α. $\lim\limits_{n} \left[ i^{i} \cdot (2i)^{2i} \cdot \ldots \cdot (ni)^{ni} \right] = 0$

β. $\lim\limits_{n} \left[ z_1^{z_1} \cdot z_2^{z_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{z_n} \right] = 0$, αν $z_n = \frac{i}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

(4) Χαρακτηρίστε ως αληθείς ή ψευδείς τα ακόλουθα

α) Αν $(z_n) \subset \mathbb{C}$ τ.ω $z_n \xrightarrow{n} \infty$ τότε η $(Arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\tilde{\mathbb{C}}$.

β) Αν $(z_n) \subset \mathbb{C}$ τ.ω $z_n \xrightarrow{n} 0$ τότε η $(Arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\tilde{\mathbb{C}}$.

γ) Αν $(z_n) \subset \mathbb{C}$ τ.ω $z_n \xrightarrow{n} i$ τότε η $(Re(z_n) \cdot Arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει προς το 0

δ) Αν $(z_n) \subset \mathbb{C}$ τ.ω $z_n \xrightarrow{n} \infty$ και $(\theta_n) \subset \mathbb{R}$, τότε $e^{-i\theta_n} \cdot z_n \xrightarrow{n} \infty$.

(5) α) Έστω $(z_n) \subset \mathbb{C}$, $A = \{ z \in \mathbb{C} : Im z > 0 \}$ και $z \in A$. Αν $z_n \to z$, νδο $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει: $z_n \in A$.

β) Έστω $(w_n) \subset \mathbb{C}$ και $w \in \mathbb{C}^*$. Αν $w_n \xrightarrow{n} w$,

νδο $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ να ισχύει: $|w_n| > 0$.

(6) Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδής. Αν $z \in \mathbb{C}^*$, τότε

α) $\lim_n \sqrt[n]{z} = 1$, β) $\lim_n n \cdot \mathrm{Im} \sqrt[n]{z} = \mathrm{Arg} z$

γ) $\lim_n n^2 \left( \sqrt[n]{|z|} - \mathrm{Re} \sqrt[n]{z} \right) = 2 \mathrm{Arg}^2 z$

δ) $\lim_n n \left( \sqrt[n]{z} - 1 \right) = \log z$

(7) Να δείξετε ότι:

$$\lim_n \left( \frac{1+i}{(1+\frac{\alpha}{n})^n + i(1-\frac{\alpha}{n})^n} \right)^n = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$$

(Υπόδειξη: (α) Ισχύει $(1+\frac{\alpha}{n})^n \xrightarrow{n} e^{\alpha}$

(β) $e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} > 2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$ )

(8) Υπολογίστε το όριο των συναρτήσεων

α) $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z - 7 - 6i}{z^2 - 3 - 4i}$, στο $z_0 = 2+i$

β) $g(z) = (z - e^{i\frac{\pi}{4}}) \cdot \dfrac{z^2}{z^4+1}$, στο $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

(9) Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τα όρια:

α) $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\bar{z}-1}{z-1}$ , β) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|^2}{z}$

γ) $\lim\limits_{z\to -1} (\operatorname{Arg} z \cdot \operatorname{Im} z)$ , δ) $\lim\limits_{z\to \infty} z^{i}$

ε) $\lim\limits_{z\to \alpha} \dfrac{1}{(z-\alpha)^n}$ , στ) $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{\log z}{\sqrt[n]{z}}$ , ζ) $\lim\limits_{z\to \infty} \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

η) $\lim\limits_{z\to b} \dfrac{1}{|z|-1}$ , αν $b\in\mathbb{C}$ τ.ω $|b|=1$

θ) $\lim\limits_{z\to b} e^{\frac{1}{|z|-1}}$ , για το $b$ του ζητήματος (ζ)

ια) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[ \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} + i\left(\dfrac{x\cdot\sin y + y\cdot \sin x}{x^2+y^2}\right)\right]$

ιβ) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[ \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} + i\left(\dfrac{x^2+y^2}{x\cdot y}\sin\left(x^4+y^4\right)\right)\right]$

10) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $f(z)=z^{i}$, $g(z)=\sqrt[n]{z}$

$h(z)=z\cdot \operatorname{Arg} z$ και $\phi(z)=\operatorname{Im}\left(\log(1-z^2)\right)$, είναι

φραγμένες στο πεδίο ορισμού τους.

11) Εξετάστε ποια απ' τα παρακάτω σύνολα είναι

ανοικτά και ποια κλειστά στο $\mathbb{C}$.

α) $A=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z<0\}$.

β) $B = \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq 2 \cdot \mathrm{Im} z < \mathrm{Re} z \}$

γ) $C = \{ z \in \mathbb{C} : z \neq i \}$

δ) $D = \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}^3 z \leq \mathrm{Im} z \leq 8 \}$

ε) $E = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z < \mathrm{Im} z \}$

12) Εξετάστε ποια απ' τα παραπάνω σύνολα στην άσκηση 11 είναι συμπαγή.

13) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\lim_{z \to i} f(z) = 1 - 2i$ και

$g : D \to \mathbb{C}$ με $D = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re} z \ \& \ \mathrm{Im} z < \frac{1}{\mathrm{Re} z} \}$

για την οποία $\lim_{z \to \infty} g(z) = i$

Υπολογίστε τα όρια $\lim_{n} f\left(\frac{(n-3)i - 1}{n}\right)$,

$\lim_{n} g(1 - in^2)$ και $\lim_{n} (f \circ g)(n - in^2)$

(14) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

α) $f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Im}(z^2)}{2|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$, β) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

γ) $f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}^2 z}{z^2}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$, δ) $f(z) = \begin{cases} \frac{z - i}{z + i}, & z \neq i \\ 0, & z = i \end{cases}$

ε) $f(z) = \operatorname{Arg}(1-z^2)$ (ή $\log(1-z^2)$)

στ) $f(z) = |\operatorname{Im} z| \cdot \operatorname{Arg}^3 z$, $z \in \mathbb{C}^*$

Για τις συναρτήσεις (α)−(δ) και (στ), εξετάστε ποιες είναι συνεχώς επεκτάσιμες στα σημεία που εν γένει δεν είναι συνεχής.

(15) Αν $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, αποδείξτε ότι η $|f|$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$.

(16) Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Δείξτε ότι $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν.ν $\forall (z_n), (w_n) \subset \mathbb{C}$ με $|z_n - w_n| \xrightarrow{n} 0$ ισχύει $|f(z_n) - f(w_n)| \xrightarrow{n} 0$.

Ως εφαρμογή: Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

(i) $f(z) = z^2$, $z \in A$ με $A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

(ii) $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$, $z \in \mathbb{C}$ και

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$

(17) Αποδείξτε ότι $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ & $p \in (0,1)$ ισχύει

$$\lim_{n} \left(1 + p\cos\alpha + p^2 \cdot \cos(2\alpha) + \ldots + p^n \cdot \cos(n\alpha)\right) = \frac{1 - p\cos\alpha}{1 - 2p\cos\alpha + p^2}$$

και

$$\lim_{n} \left(p\sin\alpha + p^2 \sin(2\alpha) + \ldots + p^n \cdot \sin(n\alpha)\right) = \frac{p\sin\alpha}{1 - 2p\cos\alpha + p^2}$$

(Υπόδειξη: Να ορίσετε μιγαδικό αριθμό

$w = p(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ και την ακολουθία

$z_n = 1 + w + w^2 + \ldots + w^n$, $n \in \mathbb{N}$ )